

**Четвёртый тур 30.11.2025. Высшая лига, бои за 1–4 места.**

1. На плоскости дан выпуклый многоугольник  $S$ . Также дано число  $\alpha$ , причём  $0 < \alpha < \pi$ . Докажите, что можно выбрать две вершины  $X$  и  $Y$  многоугольника  $S$ , а также выбрать точку  $O$  вне  $S$  так, что  $OX = OY$ ,  $\angle XOY = \alpha$ , и каждая из прямых  $OX$  и  $OY$  пересекает  $S$  по одной точке.

2. Назовём натуральный делитель  $d$  числа  $n$  *маленьким*, если  $d^2 < n$ . Известно, что все маленькие делители натурального числа  $N$  являются числами Фибоначчи. Какое наибольшее количество различных простых делителей может иметь  $N$ ?

3. Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех квадратных трёхчленов с отрицательным старшим коэффициентом, целыми коэффициентами и дискриминантом 101. Для каждого рационального  $x$  рассмотрим сумму

$$T(x) = \sum_{P \in \mathcal{F}: P(x) > 0} P(x).$$

Докажите, что значение этой суммы не зависит от  $x$ .

4. У Ивана есть  $n$  разных фруктов. *Нумерацией* назовём способ выложить все фрукты в ряд слева направо. Некоторые из  $n!$  нумераций Ивану приятны. Он обнаружил, что для каждой приятной нумерации можно выбрать такие  $k$  фруктов, что при любой перестановке местами двух последовательных фруктов из выбранных (есть  $k - 1$  способ сделать это: например, если выбраны второй, пятый и сотый фрукты, то можно менять второй и пятый либо пятый и сотый) он опять получает приятную нумерацию. Докажите, что приятных нумераций хотя бы  $k!$ .

5. Неравнобедренный остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Окружность  $\omega_1$  касается отрезков  $AB$ ,  $AC$  и окружности  $\Omega$ . Окружность  $\omega_2$  касается отрезков  $BC$ ,  $AC$  и окружности  $\Omega$ . Прямая, содержащая среднюю линию треугольника  $ABC$ , параллельную  $AC$ , пересекает окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что найдется такая точка  $T$ , что для любой (кроме, возможно, конечного количества) окружности  $\omega$ , проходящей через точки  $P$  и  $Q$ , найдутся две окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , касающиеся  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно, лежащих с  $T$  на одной прямой, а также касающиеся окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

6. Многочлен  $f(x)$  с рациональными коэффициентами степени, большей 2, не раскладывается в произведение двух многочленов с рациональными коэффициентами меньшей степени. У  $f(x)$  есть комплексные корни  $p \pm iq$ , где  $p$  — вещественное число, а  $q$  — положительное число такое, что  $q^2$  рационально. Докажите, что у  $f$  есть ещё один корень, мнимая часть которого не меньше  $q$ .

7. Конфетная фабрика производит несколько сортов конфет. Их продают не по отдельности, а в коробках; всего есть  $k$  типов коробок, в каждой — по конфете некоторых сортов (в коробках одного типа наборы сортов одинаковые). Дед Мороз составил все  $2^k - 1$  возможных подарков, содержащих не более чем по коробке каждого типа, и в каждом из них нашёл сорт, конфет которого нечётное количество. Назовём (упорядоченную) пару подарков *хорошей*, если для каждого сорта хотя бы в одном из этих двух подарков количество конфет этого сорта чётно. Докажите, что количество хороших пар подарков не превосходит  $3^k$ .

8. Скажем, что непрерывная функция  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  является  $k$ -квадратичной, если отрезок  $[0, 1]$  можно разбить на  $k$  отрезков так, что для каждого отрезка разбиения  $I$  существуют такие числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , что  $f(x) = ax^2 + bx + c$  при всех  $x \in I$ .

Даны функции  $f_1, f_2, \dots, f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Известно, что функция  $f_i$  является  $k_i$ -квадратичной, причём  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 10^6$ . Докажите, что функция  $F(x) = \max(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  является  $10^9$ -квадратичной.

9. Дан выпуклый пятиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  (полагаем  $A_{i \pm 5} = A_i$ ). Известно, что при любом  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  прямые  $A_{i+2}A_{i+3}$  и  $A_{i+1}A_{i+4}$  параллельны. Докажите, что на каждой прямой  $A_{i+2}A_{i+3}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) можно выбрать точку  $B_i$  так, что прямые  $A_iB_i$  будут иметь общую точку, и все отрезки  $A_iB_i$  будут одинаковой длины.

10. Назовём конечное слово из знаков  $+$  и  $-$  *неубывающим*, если в любом его префиксе плюсов не меньше, чем минусов; аналогично определим *невозрастающее* слово. Дано бесконечное вправо слово  $W$  из плюсов и минусов. Обязательно ли найдётся натуральное число  $k$  такое, что для любого натурального числа  $N$  найдутся либо  $N$  неубывающих слов длины не большей  $k$ , либо  $N$  невозрастающих слов длины не большей  $k$ , конкатенация которых является подсловом в  $W$ ?

**Четвёртый тур 30.11.2025. Высшая лига, бои за 5–8 места. Первая лига.**

1. На плоскости дан выпуклый многоугольник  $S$ . Также дано число  $\alpha$ , причём  $0 < \alpha < \pi$ . Докажите, что можно выбрать две вершины  $X$  и  $Y$  многоугольника  $S$ , а также выбрать точку  $O$  вне  $S$  так, что  $OX = OY$ ,  $\angle XOY = \alpha$ , и каждая из прямых  $OX$  и  $OY$  пересекает  $S$  по одной точке.

2. Назовём натуральный делитель  $d$  числа  $n$  *маленьким*, если  $d^2 < n$ . Известно, что все маленькие делители натурального числа  $N$  являются числами Фибоначчи. Какое наибольшее количество различных простых делителей может иметь  $N$ ?

3. Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех квадратных трёхчленов с отрицательным старшим коэффициентом, целыми коэффициентами и дискриминантом 101. Для каждого рационального  $x$  рассмотрим сумму

$$T(x) = \sum_{P \in \mathcal{F}: P(x) > 0} P(x).$$

Докажите, что значение этой суммы не зависит от  $x$ .

4. На плоскости отмечены конечное количество точек общего положения — вершины некоторого треугольника  $\Delta$  и несколько точек внутри него. Затем проведены все стороны  $\Delta$  и ещё несколько попарно не пересекающихся отрезков с концами в отмеченных точках, разбивающие  $\Delta$  на треугольники. Из каждой внутренней точки выходит кратное 3 количество отрезков. Может ли случиться, что количества отрезков, выходящих из вершин  $\Delta$ , имеют разные остатки при делении на 3?

5. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $H$  такая, что  $AH \perp BC$ . Точка  $X$  такова, что  $AX = AH$ . Точки  $D$  и  $E$  внутри треугольников  $BAX$  и  $CAX$  соответственно таковы, что  $\angle ABD = \angle DAX$  и  $\angle AXD = \angle DAB$ , а также  $\angle ACE = \angle EAX$  и  $\angle AXE = \angle EAC$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $XDE$  касается прямой  $BC$ .

6. Многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$  с комплексными коэффициентами получаются друг из друга перестановкой коэффициентов. Докажите, что существует комплексное число  $z \neq 1$  такое, что  $|z| = 1$  и  $|P(z)| = |Q(z)|$ .

7. Конфетная фабрика производит несколько сортов конфет. Их продают не по отдельности, а в коробках; всего есть  $k$  типов коробок, в каждой — по конфете некоторых сортов (в коробках одного типа наборы сортов одинаковые). Дед Мороз составил все  $2^k - 1$  возможных подарков, содержащих не более чем по коробке каждого типа, и в каждом из них нашёл сорт конфет которого нечётное количество. Назовём (упорядоченную) пару подарков *хорошей*, если для каждого сорта хотя бы в одном из этих двух подарков количество конфет этого сорта чётно. Докажите, что количество хороших пар подарков не превосходит  $3^k$ .

8. Найдите все непрерывные функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что при некотором натуральном  $m$  неравенства

$$a + f(a) \leq b + f(b) \quad \text{и} \quad a + f(a) + f^2(a) + \dots + f^m(a) \geq b + f(b) + f^2(b) + \dots + f^m(b)$$

выполнены при всех вещественных  $a < b$ . Здесь  $f^n(x) = f(f(\dots(f(x))\dots))$  —  $n$ -ая итерация функции  $f$ .

9. Дан выпуклый пятиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  (полагаем  $A_{i \pm 5} = A_i$ ). Известно, что при любом  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  прямые  $A_{i+2}A_{i+3}$  и  $A_{i+1}A_{i+4}$  параллельны. Докажите, что на каждой прямой  $A_{i+2}A_{i+3}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) можно выбрать точку  $B_i$  так, что прямые  $A_iB_i$  будут иметь общую точку, и все отрезки  $A_iB_i$  будут одинаковой длины.

10. Назовём конечное слово из знаков  $+$  и  $-$  *неубывающим*, если в любом его префиксе плюсов не меньше, чем минусов; аналогично определим *невозрастающее* слово. Дано бесконечное вправо слово  $W$  из плюсов и минусов. Обязательно ли найдётся натуральное число  $k$  такое, что для любого натурального числа  $N$  найдутся либо  $N$  неубывающих слов длины не большей  $k$ , либо  $N$  невозрастающих слов длины не большей  $k$ , конкатенация которых является подсловом в  $W$ ?